Ορισμός 1.

Έστω $\mathbb{F}$ σώμα, x μεταβλητή. Ένα πολυώνυμο σε μεταβλητή x με συντελεστές στο $\mathbb{F}$ είναι μία έκφραση της μορφής $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, όπου $n \geq 0$ και τα $a_i \in \mathbb{F}$. Λέμε $\varphi(x) = 0$ αν $a_0 = 0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. Αφού $\varphi(x) = 0$, τότε βαθμός $\varphi(x) = \max\{i \geq 0 \mid a_i \neq 0\}$

π.χ. βαθμός$(2 + 3x^2 + 5x^3 + 0x^4) = 3$

Μπορούμε να παραλείψουμε μηδενικούς όρους από το $\varphi(x)$, όταν $\varphi(x) \neq 0$

Ταυτίζουμε δύο μη μηδενικά πολυώνυμα όταν έχουν τους ίδιους βαθμούς και τους ίδιους συντελεστές

Αν $\varphi(x) \neq 0$ και d: βαθμός $\varphi(x)$ (που συμβολίζεται $\deg \varphi(x)$) υπάρχουν μοναδικοί $a_i \in \mathbb{F}$ για $0 \leq i \leq d$ ώστε $a_d \neq 0_{\mathbb{F}}$ και $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$

Το a_d λέγεται μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $\varphi(x)$. Το $\varphi(x)$ λέγεται μονικό αν $\varphi(x) \neq 0$

Ορισμός 2

Αν $\varphi(x), \psi(x) \in \mathbb{F}[x]$ ορίζονται τα πολυώνυμα $\varphi(x) + \psi(x)$ και $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ ως εξής. Έστω $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$

$$\psi(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_p x^p$$

με $a_i, b_i \in \mathbb{F}$. Υποθέτουμε ότι $d \geq p$

$$\varphi(x) + \psi(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_p + b_p)x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \dots + a_d x^d$$

Αντίστοιχα για $p \geq d$.

Το γινόμενο $\varphi(x)\psi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{p+d} x^{p+d}$

όπου $c_i = \sum_{t=0}^{i} a_t b_{i-t}$, για παράδειγμα $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

Πρόταση 3

Για $\varphi(x), \psi(x), \lambda(x) \in \mathbb{F}(x)$ ισχύει

(i) $(\varphi(x) + \psi(x)) + \lambda(x) = \varphi(x) + (\psi(x) + \lambda(x))$

(ii) $\varphi(x)\psi(x) = \psi(x)\varphi(x)$

(iii) $\varphi(x) + 0 = 0 + \varphi(x) = \varphi(x)$

(iv) Αν $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$ και θέσουμε $-\varphi(x) = -a_0 - a_1 x - \dots - a_d x^d$ τότε $\varphi(x) + (-\varphi(x)) = (\varphi(x)) + (-\varphi(x)) = 0 \in \mathbb{F}(x)$

(v) $(\phi(x)\psi(x))\lambda(x) = \phi(x)(\psi(x)\lambda(x))$

(vi) $\phi(x)\psi(x) = \psi(x)\phi(x)$ και $\phi(x)\cdot 1 = 1\cdot\phi(x) = \phi(x)$

(vii) $(\phi(x)+\psi(x))\lambda(x) = \phi(x)\lambda(x) + \psi(x)\lambda(x)$

$\lambda(x)(\phi(x)+\psi(x)) = \lambda(x)\phi(x) + \lambda(x)\psi(x)$

Απόδειξη: εύκολη άσκηση

Παράδειγμα 4

Έστω $\phi(x) = x-1$, $\psi(x) = x^2+x+1$. Τότε $\phi(x)\psi(x) = (x-1)(x^2+x+1) = x(x^2+x+1) - 1(x^2+x+1) = x^3+x^2+x-x^2-x-1 = x^2-1$

Πρόταση 5

Έστω $\phi(x), \psi(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\phi(x) \neq 0$, $\psi(x) \neq 0$ με $\phi(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_dx^d$ με $a_d \neq 0_{\mathbb{F}}$ και $\psi(x) = b_0 + \ldots + b_\rho x^\rho$ με $b_\rho \neq 0_{\mathbb{F}}$

Τότε $\phi(x)\cdot\psi(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ldots + (a_db_\rho)x^{\rho+d}$

Αφού $\mathbb{F}$ σώμα και $a_d \neq 0_{\mathbb{F}}$, $b_\rho \neq 0_{\mathbb{F}}$ $\Rightarrow a_db_\rho \neq 0_{\mathbb{F}}$

Επομένως, $\phi(x)\cdot\psi(x) \neq 0$ και $\deg(\phi(x)+\psi(x)) = \deg(\phi(x)) + \deg(\psi(x))$

Για το άθροισμα $\phi(x)+\psi(x)$, έχουμε 4 περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $d \neq \rho$. Τότε $\phi(x)+\psi(x) \neq 0$ και ο βαθμός $\deg(\phi(x)+\psi(x)) = \max\{\deg\phi(x), \deg\psi(x)\}$

2η περίπτωση: $d = \rho$ και $a_d + b_\rho \neq 0$. Τότε $\deg(\phi(x)+\psi(x)) = d = \rho$

3η περίπτωση: $d \neq \rho$ και $a_d + b_\rho = 0$ και $\phi(x)+\psi(x) \neq 0$. Τότε $\deg(\phi(x)+\psi(x)) < d = \rho$

4η περίπτωση: $d = \rho$, $\phi(x)+\psi(x) = 0$. Τότε δεν ορίζεται βαθμός

Πόρισμα

Αν $\phi(x)+\psi(x) \neq 0$, $\deg(\phi(x)+\psi(x)) \leq \max\{\deg\phi(x), \deg\psi(x)\}$

Για παράδειγμα, αν $\deg\phi(x) = 2$ και $\deg\psi(x) = 3$, αναγκαστικά $\deg(\phi(x)+\psi(x)) = 3$

Πρόταση 6

Έστω $\phi(x), \psi(x) \in \mathbb{F}(x)$ με $\phi(x)\psi(x) = 1$. Τότε $\phi(x) \neq 0$, $\psi(x) \neq 0$ και $\deg\phi(x) = \deg\psi(x) = 0$. Δηλαδή, $\phi(x) = a_0$, $\psi(x) = b_0$ με $a_0, b_0 \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$

Απόδειξη: Αν $\varphi(x)=0$ ή $\psi(x)=0$, τότε $\varphi(x)\psi(x)=0$ αντίφαση. Άρα $\varphi(x)\neq 0$, $\psi(x)\neq 0$. Από πρόταση 5

$0=\deg(1)=\deg(\varphi(x))+\deg(\psi(x))$ * Αλλά πάντα $\deg\varphi(x)\geq 0$, $\deg\psi(x)\geq 0$

Άρα η (*) συνεπάγεται $\deg\varphi(x)=\deg\psi(x)=0$

Παρατήρηση 7

Ταυτίζουμε το $\mathbb{F}$ με το σταθερό πολυώνυμο, που εξ ορισμού είναι το 0 μαζί με τα πολυώνυμα βαθμού 0.

Πόρισμα 8

Έστω $\varphi(x),\psi(x)\in\mathbb{F}[x]$. Αν $\varphi(x)\cdot\psi(x)=0$, τότε $\varphi(x)=0$ ή $\psi(x)=0$

Απόδειξη: άμεσα από πρόταση 5.

"Διαιρετότητα Πολυωνύμων -
Ανάγωγα Πολυώνυμα"

Ορισμός 9

Έστω $\varphi(x),\psi(x)\in\mathbb{F}[x]$ με $\varphi(x)\neq 0$. Λέμε ότι το $\varphi(x)$ διαιρεί το $\lambda(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$ αν υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε $\lambda(x)=\Pi(x)\varphi(x)$

Παρατήρηση 10

Το $\Pi(x)$, του ορισμού 9, αν υπάρχει είναι μοναδικό. Πράγματι, έστω και $\rho(x)$, ώστε $\left.\begin{array}{l}\lambda(x)=\pi(x)\varphi(x)\\ \lambda(x)=\rho(x)\varphi(x)\end{array}\right\}$ Αφαιρώντας κατά μέλη $\pi(x)\varphi(x)-\rho(x)\varphi(x)=0$

$=(\pi(x)-\rho(x))\varphi(x)=0 \xRightarrow{\text{αφού } \varphi(x)\neq 0} \pi(x)-\rho(x)=0 \Rightarrow$

$\pi(x)=\rho(x)$

Παρατήρηση 11

Έστω $\varphi(x),\lambda(x)\in\mathbb{F}[x]$ μη μηδενικά. Γράφουμε $\varphi(x)\mid\lambda(x)$, όταν το $\varphi(x)$ διαιρεί το $\lambda(x)$. Υποθέτουμε ότι $\varphi(x)\mid\lambda(x)$. Τότε υπάρχει $\Pi(x)$ με $\lambda(x)=\varphi(x)\Pi(x)$ (*) Αφού $\lambda(x)\neq 0$, επίσης $\Rightarrow (\pi)\neq 0$. Επομένως από πρόταση 5 ο βαθμός $\deg(\lambda(x))=\deg(\varphi(x))+\deg(\pi(x))$. Αφού $\deg(\pi(x))\geq 0 \Rightarrow \deg(\varphi(x)) \leq \deg(\lambda(x))$

Ορισμός 12

Έστω $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. Το $p(x)$ λέγεται ανάγωγο αν το $p(x)$ δεν είναι σταθερό, δηλαδή $p(x) \neq 0$ και $\deg p(x) \geq 1$ και πρέπει οι μόνοι διαιρέτες του $p(x)$ στο $\mathbb{F}[x]$ είναι τα μη μηδενικά σταθερά πολυώνυμα και τα πολυώνυμα της μορφής $c\,p(x)$, όπου c, μη μηδενική σταθερά.

Παράδειγμα 13.

(i) Έστω $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ βαθμού 1 τότε το $p(x)$ είναι ανάγωγο. Πράγματι, έστω $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$ μη σταθερό με $\varphi(x) \mid p(x)$. Άρα υπάρχει $\lambda(x) \in \mathbb{F}[x]$ ώστε $p(x) = \varphi(x) \cdot \lambda(x)^{*}$. Αφού $\deg p(x) = 1 \Rightarrow p(x) \neq 0 \overset{*}{\Rightarrow} \lambda(x) \neq 0$.
Άρα η $(*) \underset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗΣ}}{\Longrightarrow} 1 = \deg p(x) = \deg \varphi(x) + \deg \lambda(x)$. Αφού $\varphi(x)$ μη σταθερό, έχουμε $\varphi(x) \neq 0$ και $\deg \varphi(x) \geq 1$. Σαν συμπέρασμα, αφού $\deg \lambda(x) \geq 0$, έχουμε $\deg \varphi(x) = 1$ και $\deg \lambda(x) = 0$. Άρα υπάρχει $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ ώστε $\lambda(x) = c$. Επομένως η $(*)$ δίνει $p(x) = c \cdot \varphi(x)$. Άρα $p(x)$ είναι ανάγωγο.

(ii) Το πολυώνυμο $(x-1)(x+1) \in \mathbb{R}[x]$ δεν είναι ανάγωγο γιατί $x-1 \mid (x-1)(x+1)$ και το $x-1$ δεν είναι σταθερό, ούτε της μορφής $c(x-1)(x+1)$ με $c \in \mathbb{F}$.

Θεώρημα 14 (χωρίς απόδειξη)

Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $\varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$, γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο μίας σταθεράς και μονικών αναγώγων πολυωνύμων. Δηλαδή, υπάρχουν μοναδικά μονικά ανάγωγα πολυώνυμα $\varphi_i(x) \in \mathbb{F}[x]$ και μοναδικό $c \in \mathbb{F}$ ώστε $\varphi(x) = c\,p_1(x)\,p_2(x) \cdot \ldots \cdot p_n(x)$. Αν δεν λάβουμε υπόψη τη σειρά των p_i, είναι μοναδικά.

Παράδειγμα 15

Στο $\mathbb{C}[x]$ $2x^2 + 2 = 2(x^2+1) = 2\,\underbrace{(x+i)}_{}\,\underbrace{(x-i)}_{}$ ανάγωγα. Θα δούμε στο $\mathbb{R}[x]$ το x^2+1 είναι ανάγωγο.

Πρόταση 16 (χωρίς απόδειξη)

Έστω $\varphi(x), \lambda(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $\varphi(x) \neq 0$ μη σταθερό. Τότε υπάρχουν μοναδικά $\pi(x)$, $v(x) \in \mathbb{F}[x]$, ώστε $\lambda(x) = \varphi(x)\pi(x) + v(x)$ [illegible] $\deg v(x) < \deg \varphi(x)$

Το $v(x)$ λέγεται υπόλοιπο της διαίρεσης και $\pi(x)$ λέγεται πηλίκο της διαίρεσης

Παράδειγμα 17

$\lambda(x)=3x^3+1$, $\varphi(x)=x+1$

Θέτουμε $\lambda_1(x)=\lambda(x)-3x^2\varphi(x) = -3x^2+1$

Θέτουμε $\lambda_2(x)=\lambda_1(x)+3x\varphi(x)=3x+1$

Θέτουμε : $\lambda_3(x)=\lambda_2(x)-3\varphi(x) = -2$

Επομένως, $\lambda(x)=\lambda_1(x)+3x^2\varphi(x)=\lambda_2(x)-3x\varphi(x)+3x^2\varphi(x)=\lambda_3(x)+3\varphi(x)-3x\varphi(x)+3x^2\varphi(x)=(3x^2-3x+3)\varphi(x)-2$

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης $3x^2-3x+3$ και το υπόλοιπο -2.

Πιο εύκολος τρόπος:

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3+0x^2+0x+1 & x+1 \\
\hline
-3x^3-3x^2+0x+1 & \boxed{3x^2-3x+3} \text{ πηλίκο} \\
\hline
-3x^2+0x+1 & \\
3x^2+3x+0 & \\
\hline
3x+1 & \\
-3x-3 & \\
\hline
\boxed{-2} \text{ υπόλοιπο} &
\end{array}
$$

Πρόταση 18

Έστω $p(x)\in\mathbb{F}[x]$ ανάγωγο. Αν $\lambda_1(x),\lambda_2(x)\in\mathbb{F}[x]$ μη μηδενικά και το $p(x)\mid\lambda_1(x)\cdot\lambda_2(x)$ τότε $p(x)\mid\lambda_1(x)$ ή $p(x)\mid\lambda_2(x)$ ή $p(x)$ διαιρεί και τα δύο.